Beobachtungen zu den Wurzeln von Gleichungen*

Leonhard Euler

§1 Wenn man diese rational gemachte algebraische Gleichung jedweden Grades hat

$$x^m = Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} + Ex^{m-5} + \text{etc.}$$

welche sich auch in dieser Form darbieten lässt

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \text{etc.},$$

und man festlegt:

$$\begin{aligned} \int x \;\; &= \text{Summe aller Wurzeln,} \\ \int x^2 &= \text{Summe der Quadrate derselben Wurzeln,} \\ \int x^3 &= \text{Summe der Kuben,} \\ \int x^4 &= \text{Summe der Biquadrate} \\ &\quad \text{und so weiter,} \end{aligned}$$

*Originaltitel: "Observationes circa radices aequationum", zuerst publiziert in: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 15* (1771, geschrieben 1771): pp. 51 – 74, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 6, pp. 263 – 286, Eneström Nummer E406, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

ist bekannt, dass diese Summen so voneinander und von den Buchstaben A, B, C, D, E etc. abhängen, dass gilt

$$\begin{aligned}
\int x \;\; &= A,\\
\int x^2 &= A\int x \;\; + 2B,\\
\int x^3 &= A\int x^2 + B\int x \;\; + 3C,\\
\int x^4 &= A\int x^3 + B\int x^2 + C\int x \;\; + 4D,\\
\int x^5 &= A\int x^4 + B\int x^3 + C\int x^2 + D\int x + 5E,
\end{aligned}$$

etc.

§2 Aus diesem Fortschreitungsgesetz werden sich diese einzelnen Summen in entwickelter Form so verhalten:

$$
\begin{aligned}
\int x &= A, \\
\int x^2 &= A^2 + 2B, \\
\int x^3 &= A^3 + 3AB + 3C, \\
\int x^4 &= A^4 + 4A^2B + 4AC + 4D, \\
&\qquad\qquad + 2B^2 \\
\int x^5 &= A^5 + 5A^3B + 5A^2C + 5AD + 5E, \\
&\qquad\qquad + 5AB^2 + 5BC \\
\int x^6 &= A^6 + 6A^4B + 6A^3C + 6A^2D + 6AE + 6F, \\
&\qquad\qquad + 9A^2B^2 + 12ABC + 6BD \\
&\qquad\qquad\qquad + 2B^3 + 3CC \\
\int x^7 &= A^7 + 7A^5B + 7A^4C + 7A^3D + 7A^2E + 7AF + 7G. \\
&\qquad\qquad + 14A^3B^2 + 21A^2BC + 14ABD + 7BE \\
&\qquad\qquad\qquad + 7AB^3 + 7AC^2 + 7CD \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + 7B^2C
\end{aligned}
$$

Ich glaube, dass diese Formen nicht weiter fortzusetzen sind, weil die Betrachtung von diesen ausreicht, um das Gesetz, nach welchem die einzelnen gebildet werden, zu ermitteln.

§3 Damit wir die Struktur, nach welcher in diesen Formen die einzelnen Buchstaben A, B, C, D, E etc. miteinander verbunden sind, leichter erkennen, wollen wir dem Buchstaben A eine Dimension zuteilen, dem Buchstaben B zwei, dem Buchstaben C drei, dem Buchstaben D vier und so weiter; und es ist offenkundig, dass in jeder belieben Form nur Terme von solcher Art auftauchen, in denen die Anzahl der Dimensionen dem Exponenten der Wurzeln, deren Summe dargeboten werden, gleich ist. So enthalten in der Form $\int x^7$ die einzelnen Terme sieben Dimensionen und es werden sogar alle Terme, welche durch entsprechende Kombination sieben Dimensionen füllen, in ihr gefunden, was auch über alle übrigen Formen festzuhalten ist. Aber es sollte besonders bemerkt werden, dass nur die Potenzen der Buchstaben A, B, C, D etc. in diese Formen eingehen, deren Exponenten ganzzahlig und positiv sind, woher für jedwede summatorische Potenz alle sie bildenden Terme aus der Kombination der Buchstaben A, B, C, D etc. angegeben werden, deren Anzahl freilich immer endlich ist, auch wenn die vorgelegte Gleichung bis ins Unendliche läuft.

§4 Weil also für jedwede Potenz die Terme, sofern sie aus den Buchstaben A, B, C, D etc. zusammengesetzt sind, keine Schwierigkeiten bereiten, wird die ganze Aufgabe auf die numerischen Koeffizienten zurückgeführt, mit welchen die einzelnen Terme behaftet sind. Um aber die Gestalt dieser Koeffizienten zu ermitteln, wird es, nachdem der erste Buchstabe A etwas abseits platziert worden ist, gefällig sein, die übrigen Buchstaben B, C, D, E etc. so anzuordnen, dass in der ersten Reihe dieser Buchstaben keiner, in der zweiten Reihe nur die einzelnen, in der dritten hingegen zwei, in der vierten drei und so weiter gefunden werden; es verhält sich dann auf diese Weise:

$$
\begin{aligned}
\int x \;&= A, \\
\int x^2 &= A^2 + 2B, \\
\int x^3 &= A^3 + 3AB, \\
&\quad\;\, + 3C, \\
\int x^4 &= A^4 + 4A^2B \;+ 2BB, \\
&\quad\;\, + 4AC \\
&\quad\;\, + 4D \\
\int x^5 &= A^5 + 5A^3B \;\; + 5ABB, \\
&\quad\;\, + 5A^2C \; + 5BC, \\
&\quad\;\, + 5AD \\
&\quad\;\, + 5E \\
\int x^6 &= A^6 + 6A^4B \;+ 9A^2BB \;+ 2B^3, \\
&\quad\;\, + 6A^3C \;+ 12ABC \\
&\quad\;\, + 6A^2D + 6BD \\
&\quad\;\, + 6AE \;\; + 3CC \\
&\quad\;\, + 6F
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int x^7 = A^7 &+ 7A^5B &&+ 14A^3BB &&+ 7AB^3,\\
&+ 7A^4C &&+ 21A^2BC &&+ 7B^2C\\
&+ 7A^3D &&+ 14ABD\\
&+ 7A^2E &&+ 7ACC\\
&+7AF &&+ 7BE\\
&+7G &&+ 7CD
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int x^8 = A^8 &+ 8A^6B &&+ 20A^4BB &&+ 16A^2B^3 + 2B^4.\\
&+ 8A^5C &&+ 32A^3BC &&+ 24AB^2C\\
&+ 8A^4D &&+ 24A^2BD &&+ 8B^2D\\
&+ 8A^3E &&+ 12A^2CC &&+ 8BC^2\\
&+ 8A^2F &&+ 16ABE\\
&+ 8AG &&+ 16ACD\\
&+ 8H &&+ 8BF\\
& &&+ 8CE\\
& &&+ 4DD
\end{aligned}
$$

§5 In der ersten und zweiten Ordnung einer jeden Form tritt überhaupt keine Schwierigkeit zutage und es besteht kein Zweifel, dass für die Form $\int x^n$ der erste Terme A^n ist, die zweite Ordnung besteht hingegen aus diesen Termen

$$nA^{n-2}B + nA^{n-3}C + nA^{n-4}D + nA^{n-5} + \text{etc.};$$

aber die Natur der folgenden Ordnungen ist weniger offenkundig. Aber diesen Umstand genauer betrachtend, dass der Exponent n auch in alle folgenden Koeffizienten als Faktor eingeht, dann aber auch jede beliebige Kombination der Buchstaben B, C, D, E etc. zugleich die Anzahl der Vertauschungen beinhaltet, je nachdem in welchen Potenzen des Polynoms sie auftauchen, wenn wir in den einzelnen diese zwei Faktoren getrennt darbieten, werden wir unter Aufbringen von nur wenig Aufmerksamkeit entdecken, dass diese Formen so ausgedrückt hervorgehen werden:

$$
\begin{array}{llll}
 & \textit{Ordnung I} & \textit{Ordnung II} & \textit{Ordnung III} \\
\int x^n = A^n & + nA^{n-2}B & + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}A^{n-4}BB & \\
 & + nA^{n-3}C & + \frac{n(n-4)}{1\cdot 2}A^{n-5}2BC & \\
 & + nA^{n-4}D & + \frac{n(n-5)}{1\cdot 2}A^{n-6}(2BD+CC) & \\
 & + nA^{n-5}E & + \frac{n(n-6)}{1\cdot 2}A^{n-7}(2BE+2CD) & \\
 & + nA^{n-6}F & + \frac{n(n-7)}{1\cdot 2}A^{n-8}(2BF+2CE+DD) & \\
 & + nA^{n-7}G & + \frac{n(n-8)}{1\cdot 2}A^{n-9}(2BG+2CF+2DE) & \\
 & \text{etc.} & \text{etc.} &
\end{array}
$$

Ordung IV

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-6}B^3 \\
&+ \frac{n(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-7}3B^2C \\
&+ \frac{n(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-8}(3B^2D+3BC^2) \\
&+ \frac{n(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-9}(3B^2E+6BCD+C^3) \\
&+ \frac{n(n-8)(n-9)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-10}(3B^2F+6BCE+3BDD+3CCD)
\end{aligned}
$$

etc.

Ordung V

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} A^{n-8}B^4\\
&+ \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} A^{n-9}4B^3C\\
&+ \frac{n(n-7)(n-8)(n-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} A^{n-10}(4B^3D+6B^2C^2)\\
&+ \frac{n(n-8)(n-9)(n-10)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} A^{n-11}(4B^3E+12B^2CD+4BC^3)\\
&+ \frac{n(n-9)(n-10)(n-11)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} A^{n-12}(4B^3F+12B^2CE+6B^2D^2+12BC^2D+C^4)
\end{aligned}
$$

etc.

Ordung VI

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} A^{n-10}B^5\\
&+ \frac{n(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} A^{n-11}5B^4C\\
&+ \frac{n(n-8)(n-9)(n-10)(n-11)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} A^{n-12}(5B^4D+10B^3C^2)\\
&+ \frac{n(n-9)(n-10)(n-11)(n-12)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} A^{n-13}(5B^4E+20B^3CD+10B^3C^3)\\
&+ \frac{n(n-10)(n-11)(n-12)(n-13)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} A^{n-14}(5B^4F+20B^3CE+10B^3D^2+30B^2C^2D+5BC^4)
\end{aligned}
$$

etc.

§6 Daher wird sich eine beliebige Ordnung im Allgemeinen entwickeln lassen; es sei nämlich der Index der Ordnung $\lambda+1$ und man setze die Glieder dieser Ordnung

$$+\frac{n(n-\lambda-1)(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)\cdots(n-2\lambda+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\lambda}A^{n-2\lambda}\cdot O$$
$$+\frac{n(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)(n-\lambda-4)\cdots(n-2\lambda)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\lambda}A^{n-2\lambda-1}\cdot P$$
$$+\frac{n(n-\lambda-3)(n-\lambda-4)(n-\lambda-5)\cdots(n-2\lambda-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\lambda}A^{n-2\lambda-2}\cdot Q$$
$$+\frac{n(n-\lambda-4)(n-\lambda-5)(n-\lambda-6)\cdots(n-2\lambda-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\lambda}A^{n-2\lambda-3}\cdot R$$
$$\text{etc.}$$

und die Werte dieser Buchstaben O, P, Q, R etc. werden sich so verhalten, dass

$$O+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\text{etc.}=(B+Cz+Dz^2+Ez^3+\text{etc.})^\lambda$$

ist, woher wir nach der Entwicklung berechnen

$$O=B^\lambda,$$
$$P=\frac{\lambda}{1}\cdot\frac{OC}{B},$$
$$Q=\frac{2\lambda}{2}\cdot\frac{OD}{B}+\frac{\lambda-1}{2}\cdot\frac{PC}{B},$$
$$R=\frac{3\lambda}{3}\cdot\frac{OE}{B}+\frac{2\lambda-1}{3}\cdot\frac{PD}{B}+\frac{\lambda-2}{3}\cdot\frac{QC}{B},$$
$$S=\frac{4\lambda}{4}\cdot\frac{OF}{B}+\frac{3\lambda-1}{4}\cdot\frac{PE}{B}+\frac{2\lambda-2}{4}\cdot\frac{QD}{B}+\frac{\lambda-3}{4}\cdot\frac{RC}{B},$$
$$T=\frac{5\lambda}{5}\cdot\frac{OG}{B}+\frac{4\lambda-1}{5}\cdot\frac{PF}{B}+\frac{3\lambda-2}{5}\cdot\frac{QE}{B}+\frac{2\lambda-3}{5}\cdot\frac{RD}{B}+\frac{\lambda-4}{5}\cdot\frac{SC}{B}$$
$$\text{etc.}$$

oder durch Einsetzen der schon gefundenen Werte

$$
\begin{aligned}
O &= B^{\lambda}, \\
P &= \lambda B^{\lambda-1} C, \\
Q &= \lambda B^{\lambda-1} D \;+\; \frac{\lambda(\lambda-1)}{1\cdot 2} B^{\lambda-2} C^2, \\
R &= \lambda B^{\lambda-1} E \;+\; \frac{2\lambda(\lambda-1)}{1\cdot 2} B^{\lambda-2} CD + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1\cdot 2\cdot 3} B^{\lambda-3} C^3, \\
S &= \lambda B^{\lambda-1} F \;+\; \frac{\lambda(\lambda-1)}{1\cdot 2} B^{\lambda-2}(2CE+DD) + \frac{3\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1\cdot 2\cdot 3} B^{\lambda-3} C^2 D, \\
&\qquad\qquad + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} B^{\lambda-4} C^4 \\
&\qquad\qquad\quad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

§7 Über diese allgemeine Form ist sorgfältig festzuhalten, dass mit ihr die Summe der einzelnen zur Potenz n erhobenen Wurzeln nur dann ausgedrückt wird, wenn zum einen der Exponent n eine ganze positive Zahl ist, dann aber aus der allgemeinen Form, welche bis ins Unendliche läuft, alle Terme ausgeschlossen werden, in welchen der Buchstabe A einen negativen Exponenten erhalten hätte. Daher entspringt die Frage von größter Bedeutung, wie der Wert dieser allgemeinen Formen sein wird, wenn alle Terme bis ins Unendliche beibehalten werden, und das unabhängig davon, ob der Exponent n positiv oder negativ ist, ob gebrochen oder ganzzahlig. Ich habe es also unternommen, diese Frage, weil daraus höchst bemerkenswerte und in der Reihenlehre neue Erkenntnisse schaffende Betrachtungen entspringen, hier genauer zu entwickeln. Ich werde aber zeigen, dass in dieser allgemeinen Form nicht die Summe der Potenzen zum Exponenten n, die aus den einzelnen Wurzeln gebildet werden, sondern vielmehr die gleiche Potenz lediglich einer ihrer, und zwar ihrer größten, Wurzel ausgedrückt wird.

§8 Um aber diese Untersuchung zu vereinfachen, werde ich vom einfachsten Fall dieser Gleichung

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{D}{xx}$$

aus beginnen, sodass die Buchstaben C, D, E etc. alle verschwinden. Für diesen Fall wird also unsere allgemeine Form, nach deren Wert wir suchen,

$$A^n + nA^{n-2}B + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}A^{n-4}B^2 + \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}A^{n-6}B^3 \\ + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}A^{n-8}B^4 + \text{etc.}$$

sein.

Wir wollen zuerst $n = 1$ setzen und der Wert der Reihe sei $= s$, dass

$$s = A + \frac{B}{A^1} - \frac{2}{2} \cdot \frac{B^2}{A^3} + \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{B^3}{A^5} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{B^4}{A^7} + \text{etc.}$$

ist, welche auf diese Form

$$s = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2} \cdot \frac{2B}{A} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{8B^2}{A^3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{32B^3}{A^5} - \text{etc.}$$

zurückgeführt wird, die Summe welcher Reihe offenkundig

$$s = \frac{1}{2}A + \sqrt{\frac{1}{4}AA + B}$$

ist, welche die größere Wurzel der vorgelegten Gleichung ist. Aber dann ist schon bekannt, dass der allgemeine Wert jener allgemeinen Reihe

$$= \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}AA + B}\right)^n$$

ist; daher besteht kein weiterer Zweifel, dass jene allgemeine Form die Potenz zum Exponenten n nur einer und zwar der größeren Wurzel der Gleichung ausdrückt, zumindest in diesem Fall.

§9 Aber im Allgemeinen wird dieselbe Schlussfolgerung auf diese Weise gezogen werden können. Es bezeichne $s^{(n)}$ jenen ganzen in § 5 dargebotenen und ins Unendliche laufenden Ausdruck und es seien $s^{(n-1)}$, $s^{(n-2)}$, $s^{(n-3)}$ etc. die Werte desselben, wenn anstelle von n respektive $n-1$, $n-2$, $n-3$ etc. geschrieben wird; und aus der Entstehung jenes Ausdrucks sieht man ein, dass

$$s^{(n)} = As^{(n-1)} + Bs^{(n-2)} + Cs^{(n-3)} + Ds^{(n-4)} + \text{etc.}$$

sein wird; aber aus der vorgelegten Gleichung selbst ist auch

$$x^m = Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} + \text{etc.},$$

woher, wenn diese zwei Gleichung auf die folgende Weise dargestellt werden

$$1 = \frac{As^{(n-1)}}{s^{(n)}} + \frac{Bs^{(n-2)}}{s^{(n)}} + \frac{Cs^{(n-3)}}{s^{(n)}} + \frac{Ds^{(n-4)}}{s^{(n)}} + \text{etc.}$$

und

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \text{etc.},$$

weil dies ja für alle Zahlen n gilt, folgt, dass

$$s^{(n)} = xs^{(n-1)} = x^2 s^{(n-2)} = x^3 s^{(n-3)} = x^4 s^{(n-4)} \quad \text{etc.}$$

sein wird.

Weil also für $n = 0$ gesetzt $s^{(0)} = A^0 = 1$ ist, wird, indem man für n nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. schreibt,

$$s^{(1)} = x, \quad s^{(2)} = x^2, \quad s^{(3)} = x^3, \quad s^{(4)} = x^4 \quad \text{etc.}$$

sein. Daher ist gezeigt, dass im Allgemeinen

$$s^{(n)} = x^n,$$

sein wird. Dass aber hier für x die größte Wurzel der vorgelegten Gleichung genommen werden muss, ist daher klar, dass für einen unendlich großen Exponenten n, in welchem Fall der ganze Teil unserer Form anzusehen ist, nicht von der allgemein Form abzuweichen, die Summe der infinitesimalen Potenzen auf eine infinitesimale Potenz der größten Wurzel allein reduziert wird.

§10 Betrachte also diese höchst bemerkenswerte Theorem, welches einen sehr umfassenden Nutzen haben wird, dass nach Vorlage irgendeiner Gleichung dieser Form

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \text{etc.},$$

deren größte Wurzel $x = m$ sei, der Wert des oben in § 5 dargebotenen und bis ins Unendliche laufenden Ausdrucks m^n ist. Daher, wenn $n = 1$ ist, wird derselbe Ausdruck die größte Wurzel selbst ausdrücken. Hier tritt das besonders bemerkenswerte Phänomen auf, dass alle Potenzen derselben Wurzel durch ähnliche unendliche Ausdrücke gegeben sind; ja, durch Setzen von $n = 0$, wird wegen $\frac{m^0 - A^0}{0} = \log \frac{m}{A}$ der hyperbolische Logarithmus der größten Wurzel m auf diese Weise ausgedrückt werden

$$\begin{aligned}
\log m = \log A &+ \frac{B}{A^2} - \frac{3B^2}{2A^4} && + \frac{4 \cdot 5B^3}{2 \cdot 3A^6} \\
&+ \frac{C}{A^3} - \frac{4 \cdot 2BC}{2A^5} && + \frac{5 \cdot 6 \cdot 3B^2C}{2 \cdot 3A^7} \\
&+ \frac{D}{A^4} - \frac{5(2BD + CC)}{2A^6} && + \frac{6 \cdot 7(3B^2D + 3BC^2)}{2 \cdot 3A^8} \\
&+ \frac{E}{A^5} - \frac{5(2BE + 2CD)}{2A^7} && + \frac{7 \cdot 8(3B^2E + 6BCD + C^3)}{2 \cdot 3A^9} \\
& && \text{etc.}
\end{aligned}$$

§11 Weil ja also daher von jedweder Gleichung nicht nur die größte Wurzel sondern auch irgendeine ihrer Potenzen mit unendlichen Reihen ausgedrückt werden kann, lässt sich daher zuerst jene wunderschöne Reihe, welche LAMBERT, ein Herr größten Scharfsinns, in Band III der **Actorum Helveticorum** für die Auflösung von aus nur drei Termen bestehenden Gleichungen angegeben hat, ableiten. Wie nämlich oben diese Gleichung

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$$

die Reihe

$$x^n = A^n + nA^{n-2}B + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}A^{n-4}B^2 + \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-6}B^3 + \text{etc.}$$

gegeben hatte, so wird diese Gleichung

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{C}{x^3}$$

entsprechend

$$x^n = A^n + nA^{n-3}C + \frac{n(n-5)}{1\cdot 2}A^{n-6}C^2 + \frac{n(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-9}C^3 + \text{etc.}$$

geben und diese Gleichung

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{D}{x^4}$$

$$x^n = A^n + nA^{n-4}D + \frac{n(n-7)}{1\cdot 2}A^{n-8}D^2 + \frac{n(n-10)(n-11)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-12}D^3 + \text{etc.};$$

so schließen wir, dass für diese Gleichung

$$1 = \frac{A}{x} + \frac{M}{x^m}$$

gelten wird:

$$\begin{aligned} x^n &= A^n + nA^{n-m}M + \frac{n(n-2m+1)}{1\cdot 2}A^{n-2m}M^2 \\ &+ \frac{n(n-3m+2)(n-3m+1)}{1\cdot 2\cdot 3}A^{n-3m}M^3 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Wir wollen nun $x = y^\lambda$ und $x^m = y^\mu$ setzen, dann wollen wir aber B für M und $\frac{n}{\lambda}$ anstelle von n schreiben und wegen $m = \frac{\mu}{\lambda}$ werden wir für die Auflösung dieser allgemeinen Gleichung

$$1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu}$$

haben:

$$\begin{aligned} y^\mu &= A^{\frac{n}{\lambda}} + \frac{n}{\lambda}A^{\frac{n-\mu}{\lambda}}B + \frac{n(n+\lambda-2\mu)}{1\cdot 2\lambda^2}A^{\frac{n-2\mu}{\lambda}}B^2 + \frac{n(n+2\lambda-3\mu)(n+\lambda-3\mu)}{1\cdot 2\cdot 3\lambda^3}A^{\frac{n-3\mu}{\lambda}}B^3 \\ &+ \frac{n(n+3\lambda-4\mu)(n+2\lambda-4\mu)(n+\lambda-4\mu)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\lambda^4}A^{\frac{n-4\mu}{\lambda}}B^4 + \text{etc.} \end{aligned}$$

§12 Wenn also die Wurzel y dieser Gleichung

$$1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu}$$

verlangt wird, muss $n = 1$ gesetzt werden und es wird

$$y^\mu = A^{\frac{1}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} A^{\frac{1-\mu}{\lambda}} B + \frac{(1+\lambda-2\mu)}{1 \cdot 2\lambda^2} A^{\frac{1-2\mu}{\lambda}} B^2 + \frac{(1+2\lambda-3\mu)(1+\lambda-3\mu)}{2 \cdot 3\lambda^3} A^{\frac{1-3\mu}{\lambda}} B^3$$
$$+ \frac{(1+3\lambda-4\mu)(1+2\lambda-4\mu)(1+\lambda-4\mu)}{2 \cdot 3 \cdot 4\lambda^4} A^{\frac{1-4\mu}{\lambda}} B^4 + \text{etc.}$$

werden, welches die von LAMBERT an erwähnter Stelle dargebotene Reihe ist und umso bemerkenswerter erscheint, weil das Gesetz der Koeffizienten ziemlich regelmäßig aber dennoch so beschaffen ist, dass, wenn die Reihe selbst vorgelegt wird, kein Weg offensteht ihre Summe ausfindig zu machen; das ist umso wundersamer, weil die Summe dieser Reihe nichtsdestotrotz nicht nur bekannt ist, sondern sogar algebraisch dargeboten werden kann, weil sie eine der Wurzeln dieser Gleichung

$$1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu}$$

und zwar die größte ist. Weiter ist ohne Zweifel diese Eigenschaft dieser Reihe von größter Bedeutung, dass all ihre Potenzen mit ähnlichen Reihen ausgedrückt werden.

§13 Es wird also nicht vom Gegenstand wegführen, die Beschaffenheit dieser einzelnen Reihen in einigen Beispielen betrachtet zu haben. Wir wollen also $\lambda = 3$ und $\mu = 2$ nehmen, dass wir diese kubische Gleichung

$$y^3 = A + By$$

haben, eine der Wurzeln von welcher also

$$y = A^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} A^{-\frac{1}{3}} B + 0 A^{-1} B^2 - \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} A^{-\frac{5}{3}} \left(\frac{B}{3}\right)^3 + \frac{4 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} A^{-\frac{7}{3}} \left(\frac{B}{3}\right)^4$$
$$- \frac{6}{2} \cdot -\frac{3}{3} \cdot \frac{0}{4} \cdot \frac{3}{5} A^{-3} \left(\frac{B}{3}\right)^5 - \frac{8}{2} \cdot -\frac{5}{3} \cdot -\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{6} A^{-\frac{11}{3}} \left(\frac{B}{3}\right)^6 + \text{etc.}$$

sein wird; um diesen Ausdruck zu vereinfachen, wollen wir $A = a^3$ und $B = 3b$ nehmen, dass von dieser Gleichung

$$y^3 = 3by + a^3$$

die Wurzel als

$$\begin{aligned}
y = a + \frac{b}{a} + \frac{4\cdot 1\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{b^4}{a^7} + \frac{10\cdot 7\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{b^7}{a^{13}} + \frac{16\cdot 13\cdot 10\cdot 7\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}\cdot\frac{b^{10}}{a^{19}} + \text{etc.}\\
-\frac{2\cdot 1}{2\cdot 3}\cdot\frac{b^3}{a^5} - \frac{8\cdot 5\cdot 2\cdot 1\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot\frac{b^6}{a^{11}} - \frac{14\cdot 11\cdot 8\cdot 5\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}\cdot\frac{b^9}{a^{17}}\\
-\frac{20\cdot 17\cdot 14\cdot 11\cdot 8\cdot 5\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}\cdot\frac{b^{12}}{a^{23}} - \text{etc.}
\end{aligned}$$

hervorgeht, welche gefälliger so dargestellt wird

$$\begin{aligned}
y = a + \frac{b}{a} + \frac{1}{3}\cdot\frac{b^4}{a^7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{7\cdot 10}{6\cdot 7}\cdot\frac{b^7}{a^{13}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{7\cdot 10}{6\cdot 7}\cdot\frac{13\cdot 16}{9\cdot 10}\cdot\frac{b^{10}}{a^{19}}\\
+\frac{1}{3}\cdot\frac{7\cdot 10}{6\cdot 7}\cdot\frac{13\cdot 16}{9\cdot 10}\cdot\frac{19\cdot 22}{12\cdot 13}\cdot\frac{b^{13}}{a^{25}} + \text{etc.}\\
-\frac{1}{3}\cdot\frac{b^3}{a^5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot 8}{5\cdot 6}\cdot\frac{b^6}{a^{10}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot 8}{5\cdot 6}\cdot\frac{11\cdot 14}{8\cdot 9}\cdot\frac{b^9}{a^{17}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot 8}{5\cdot 6}\cdot\frac{11\cdot 14}{8\cdot 9}\cdot\frac{17\cdot 20}{11\cdot 12}\cdot\frac{b^{12}}{a^{23}} - \text{etc.}
\end{aligned}$$

§14 Diese Reihe verdient eine genauere Entwicklung. Wir wollen also für die erste

$$s = x + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}\cdot\frac{7\cdot 10}{6\cdot 7}x^7 + \cdots + Mx^{3n+1} + Nx^{3n+4} + \text{etc.}$$

setzen, und weil

$$\frac{N}{M} = \frac{6n+1}{3n+3}\cdot\frac{6n+4}{3n+4}$$

ist, wird diese Bedingung von dieser Differentialgleichung zweiten Grades erfüllt

$$dds = 4x^3dds + 6xxdxds - 2xsdx^2,$$

welche gefällig mit $2xds - sdx$ multipliziert integrierbar wird; man findet nämlich durch Integrieren

$$xds^2 - sdxds + Cdx^2 = 4x^4ds^2 - 4x^3sdxds + xxssdx^2,$$

wo, weil für unendlich kleines x ja $s = x$ und $\frac{ds}{dx} = 1$ wird, es ersichtlich ist, dass $C = 0$ genommen werden muss, sodass

$$(xds - sdx)ds = 4x^3(xds - sdx)ds + xxssdx^2 = xx(2xds - sdx)^2$$

oder

$$\frac{ds^2}{ssdx^2} = \frac{ds}{xsdx} + \frac{x}{1-4x^3}$$

ist, woher durch Ziehen der Wurzel

$$\frac{ds}{sdx} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{1}{1-4x^3}}$$

wird, sodass wir

$$\log s = \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4x^3}} = \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{3}\log \frac{2x\sqrt{x}}{1+\sqrt{1-4x^3}}$$

haben. Daher wird also

$$s = x\sqrt[3]{\frac{2}{1+\sqrt{1-4x^3}}}$$

sein.

§15 Wir wollen also $\frac{b}{aa} = x$ setzen, dass wir

$$\begin{aligned} \frac{y}{a} = 1 + x + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}\cdot\frac{7\cdot 10}{6\cdot 7}x^7 + \frac{1}{3}\cdot\frac{7\cdot 10}{6\cdot 7}\cdot\frac{13\cdot 16}{9\cdot 16}x^{10} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot 8}{5\cdot 6}x^6 - \frac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot 8}{5\cdot 6}\cdot\frac{11\cdot 14}{8\cdot 9}x^9 - \text{etc.} \end{aligned}$$

oder

$$\frac{y}{a} = s + 1 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot 8}{5\cdot 6}x^6 - \frac{1}{3}\cdot\frac{5\cdot 8}{5\cdot 6}\cdot\frac{11\cdot 14}{8\cdot 9}x^9 - \text{etc.}$$

haben. Wir wollen die Summe der Reihe

$$1 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 8}{5 \cdot 6}x^6 - \text{etc.} = t$$

setzen und wir werden wie zuvor, da das Fortschreitungsgesetz ja dasselbe ist, finden

$$ddt = 4x^3 ddt + 6xxdxdt - 2xtdx^2;$$

deren Integral ist daher auch

$$xdt^2 - tdxdt = 4x^4 dt^2 - 4x^3 tdxdt + xxttdx^2$$

ist; weil nämlich für unendlich kleines x dann $t = 1$ und $\frac{dt}{dx} = 0$ wird, verschwindet die hinzuzufügende Konstante auch. Weiter erhalten wir also durch Integrieren

$$t = x\sqrt[3]{\frac{2}{1 - \sqrt{1 - 4x^3}}}$$

und es wird $t = 1$, wenn $x = 0$ ist. Deshalb werden wir für die Wurzel der Gleichung

$$y^3 = 3by + a^3$$

haben:

$$\begin{aligned} \frac{y}{a} = s + t = x\sqrt[3]{\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4x^3}}} + x\sqrt[3]{\frac{2}{1 - \sqrt{1 - 4x^3}}} \\ = \sqrt[3]{\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt{1 - 4x^3}}{2}}, \end{aligned}$$

wobei $x = \frac{bb}{a}$ ist, und daher auch

$$y = \sqrt[3]{\frac{a^3 - \sqrt{a^6 - 4b^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{a^3 + \sqrt{a^6 - 4b^3}}{2}},$$

welchen selben Ausdruck die CARDANISCHE Regel an die Hand gibt.

§16 Wir wollen ein anderes Beispiel der kubischen Gleichung entwickeln, indem wir $\lambda = 1$ und $\mu = 3$ setzen, dass

$$y^3 = Ayy + B$$

ist, und für $\frac{B}{A^3} = x$ gesetzt gibt unsere Form

$$\frac{y}{A} = 1 + x - \frac{4}{2}x^2 + \frac{6 \cdot 7}{2 \cdot 3}x^3 - \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}x^5 - \text{etc.},$$

welche auf dieses Kontinuitätsgesetz zurückgeführt wird

$$\frac{y}{A} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + x - \frac{4}{2}x^2 + \frac{6 \cdot 7}{2 \cdot 3}x^3 \cdots \pm Mx^n \mp Mx^{n+1} \pm \text{etc.},$$

dass

$$N = \frac{3(3n-1)(3n+1)}{(2n+1)(2n+2)}M = \frac{27nn-3}{4nn+6n+2}M$$

ist. Wir wollen

$$\frac{y}{A} - \frac{1}{3} = s$$

setzen und die Relation zwischen s und x wird mit dieser Differentialgleichung zweiten Grades ausgedrückt werden

$$4xxdds + 2xdxds + 27x^3dds + 27x^2dxds - 3xsdx^2 = 0,$$

welche mit $\frac{2ds}{x}$ multipliziert und integriert

$$4xds^2 + 27xxds^2 - 3ssdx^2 = Cdx^2$$

liefert, woher man

$$\frac{ds}{\sqrt{C+3ss}} = \frac{dx}{\sqrt{4x+27xx}}$$

berechnet, deren Integration

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\log(s\sqrt{3} + \sqrt{C+3ss}) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\log\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} + 3x\sqrt{3} + \sqrt{4x+27xx}\right)$$

gibt, woher man weiter diese algebraische Gleichung findet

$$s = A\left(1 + \frac{27x}{2} + 3\sqrt{3x + \frac{81xx}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} + B\left(1 + \frac{27x}{2} - 3\sqrt{3x + \frac{81xx}{4}}\right)^{\frac{1}{3}},$$

welche entwickelt natürlich

$$s^3 = 3ABs + (A^3 + B^3)\left(1 + \frac{27x}{2}\right) + 3(A^3 - B^3)\sqrt{3x + \frac{81xx}{4}}$$

liefert; aber die zwischen s und x angenommene Gleichung war

$$s^3 = \frac{1}{3}s + \frac{2}{27} + x,$$

welche in jenem vollständigen Integral für

$$A = B = \frac{1}{3}$$

enthalten ist.

§17 Diese höchst elegante Entwicklung von aus nur drei Termen bestehenden Gleichungen

$$1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu}$$

verdient umso größere Aufmerksamkeit, weil kein direkter Weg bekannt ist, aus der gefundenen Reihe im Allgemeinen den Wert der Summe y ausfindig zu machen, auch wenn diese Summe schließlich mit einer höchst gefälligen algebraischen Gleichung dargeboten werden kann. Dass sich nämlich dieser Fall für quadratische und kubische Gleichungen erledigen ließ, ist allein dem Umstand zuzuschreiben, dass die Auflösung dieser Gleichungen möglich ist; daher lässt sich nicht zu Unrecht vermuten, wenn eine Methode entdeckt werden würde Reihen von dieser Art zu summieren, dass sich daraus außerordentliche Hilfsmittel für die Lösung eines jeden Grades ergeben werden. Auf die gleiche Weise kann aber die Entwicklung von aus vier Termen bestehenden Gleichungen dargeboten werden, welche sich sehr weit erstreckt und dabei so beschaffen ist, dass die einzelnen Terme immer mehr Glieder enthalten, deren Struktur dennoch hinreichend deutlich ist.

§18 Wenn nämlich im Allgemeinen diese aus vier Termen bestehende Gleichung vorgelegt war

$$1 = \frac{A}{y^{\lambda}} + \frac{B}{y^{\mu}} + \frac{C}{y^{\nu}}$$

und wir $y^n = P + Q + R + S + T +$ etc. setzen, werden diese Teile P, Q, R, S, T etc. auf die folgende Weise bestimmt

$$P = A^{\frac{n}{\lambda}},$$

$$Q = \frac{n}{\lambda} A^{\frac{n-\mu}{\lambda}} B + \frac{n}{\lambda} A^{\frac{n-\nu}{\lambda}} C,$$

$$R = \frac{n(n+\lambda-2\mu)}{1 \cdot 2\lambda^2} A^{\frac{n-2\mu}{\lambda}} BB + \frac{2n(n+\lambda-\mu-\nu)}{1 \cdot 2\lambda^2} A^{\frac{n-\mu-\nu}{\lambda}} BC$$

$$+ \frac{n(n+\lambda-2\nu)}{1 \cdot 2\lambda^2} A^{\frac{n-2\nu}{\lambda}} CC,$$

$$S = \frac{n(n+\lambda-3\mu)(n+2\lambda-3\mu)}{1 \cdot 2 \cdot 3\lambda^3} A^{\frac{n-3\mu}{\lambda}} B^3$$

$$+ \frac{3n(n+\lambda-2\mu-\nu)(n+2\lambda-2\mu-\nu)}{1 \cdot 2 \cdot 3\lambda^3} A^{\frac{n-2\mu-\nu}{\lambda}} BC^2$$

$$+ \frac{3n(n+\lambda-\mu-2\nu)(n+2\lambda-\mu-2\nu)}{1 \cdot 2 \cdot 3\lambda^3} A^{\frac{n-\mu-2\nu}{\lambda}} BC^2$$

$$+ \frac{n(n+\lambda-3\nu)(n+2\lambda-3\nu)}{1 \cdot 2 \cdot 3\lambda} A^{\frac{n-3\nu}{\lambda}} C^3,$$

$$T = \frac{n(n+\lambda-4\mu)(n+2\lambda-4\mu)(n+3\lambda-4\mu)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\lambda^4} A^{\frac{n-4\mu}{\lambda}} B^4$$

$$+ \frac{4n(n+\lambda-3\mu-\nu)(n+2\lambda-3\mu-\nu)(n+3\lambda-3\mu-\nu)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\lambda^4} A^{\frac{n-3n-\nu}{\lambda}} B^3C$$

$$+ \frac{6n(n+\lambda-2\mu-2\nu)(n+2\lambda-2\mu-2\nu)(n+3\lambda-2\mu-2\nu)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\lambda^4} A^{\frac{n-2\mu-2\nu}{\lambda}} B^2C^2$$

$$+ \frac{4n(n+\lambda-\mu-3\nu)(n+2\lambda-\mu-3\nu)(n+3\lambda-\mu-3\nu)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\lambda^4} A^{\frac{n-\mu-3\nu}{\lambda}} BC^3$$

$$+ \frac{n(n+\lambda-4\nu)(n+2\lambda-4\nu)(n+3\lambda-4\nu)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\lambda^4} A^{\frac{n-4\nu}{\lambda}} C^4$$

etc.

§19 Daher wird nun, wie viele Terme auch immer die Gleichung

$$1 = \frac{A}{y^\lambda} + \frac{B}{y^\mu} + \frac{C}{y^\nu} + \frac{D}{y^\xi} + \text{etc.}$$

enthält, im Allgemeinen der Wert der unbestimmten Potenz y^n angegeben werden können; denn sie wird der aus unendlich vielen Termen zusammengesetzten Reihe gleich, welche Terme aus allen Kombinationen der Größen B, C, D etc. entstehen. Es wird also genügen, im Allgemeinen den dieser Kombination $B^\beta C^\gamma D^\delta$ etc. zukommenden Term bestimmt zu haben, wo β, γ, δ etc. nacheinander alle ganzen positiven Zahlen von Null aus, also 0, 1, 2, 3 etc., bis ins Unendliche eingesetzt zu werden zu verstehen sind. Um aber diesen Term zu finden, muss zuerst die Anzahl der Kombinationen der Form $B^\beta C^\gamma D^\delta$ etc. ermittelt werden, welche wir $= N$ setzen wollen, und nachdem die Summe der Exponenten $\beta + \gamma + \delta + \text{etc.} = p$ gesetzt wurde, ist bekannt, dass

$$N = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}{1 \cdot 2 \cdots \beta \cdot 1 \cdot 2 \cdots \gamma \cdot 1 \cdot 2 \cdots \delta \text{etc.}}$$

ist. Weiter wollen wir der Kürze wegen $\beta\mu + \gamma\nu + \delta\xi + \text{etc.} = q$ setzen und der gesuchte der Form $B^\beta C^\gamma D^\delta$ etc. zukommende Term wird

$$N \cdot \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n+\lambda-q}{2\lambda} \cdot \frac{n+2\lambda-q}{3\lambda} \cdot \frac{n+3\lambda-q}{4\lambda} \cdots \frac{n+(p-1)\lambda-q}{p\lambda} A^{\frac{n-q}{\lambda}} B^\beta C^\gamma D^\delta \text{etc.}$$

sein. Also werden all these Terme zusammen genommen den wahren Wert der Potenz y^n bestimmen.

Entwicklung der Gleichung $1 = \frac{A}{y} + By^3$

§20 Um dein Beispiel einer biquadratischen Gleichung vorzutragen, unternehme ich es, diese Gleichung, welche diese Form

$$By^4 = y - A$$

gibt, zu entwickeln. Weil also $\lambda = 1$ und $\mu = -3$ ist, erhalten wir die Reihe

$$y = A + A^4B + \frac{8}{2}A^7B^2 + \frac{11 \cdot 12}{2 \cdot 3} + \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 4}A^{13}B^4$$

$$+\frac{17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}A^{16}B^5+\text{etc.}$$

In dieser Reihe hängt jeder beliebige Term so vom vorhergehenden ab, dass jedweder Term durch den vorgehenden geteilt einen Quotienten von dieser Form liefert

$$4\frac{(4n-3)(4n-2)(4n-1)}{3n(3n-1)(3n+1)}A^3B,$$

woher die Summation dieser Reihe auf eine Differentialgleichung dritten Grades geführt wird, welche für $A=\frac{3}{4}u$ und $B=\frac{1}{4}$ gesetzt, dass die Gleichung

$$y^4=4y-3u$$

vorgelegt ist, sich so verhalten wird

$$32(1-u^3)d^3y-144uududdy-86udu^2dy+5ydu^3=0,$$

wobei natürlich das Element du konstant angenommen worden ist. Wie aber jene Gleichung in dieser enthalten ist, erkennt man nicht.

§21 Ich habe aber beobachtet, dass diese Gleichung integrierbar gemacht wird, wenn sie mit y multipliziert wird; denn die einzelnen Terme, sofern es geschehen kann, liefern integriert das folgende:

$$\int yd^3y=yddy-\frac{1}{2}dy^2 \quad \text{(durch 32)},$$

$$\int u^3yd^3y=u^3yddy-\frac{1}{2}u^3dy^2-3uuydudy+3uy^2du^2$$

$$+\frac{9}{2}\int uudud y^2-3\int yydu^3 \quad (\text{durch } -32),$$

$$\int uuyduddy=uuydudy-uyydu^2-\int uududy^2+\int yydu^3 \quad (\text{durch } -144),$$

$$\int udu^2ydy=\frac{1}{2}uy^2du^2-\frac{1}{2}\int yydu^3 \quad (\text{durch } -86)$$

$$\int yydu^3=\int yydu^3 \quad \text{(durch 5)},$$

woher diese integrierte Form entsteht

$$16(1-u^3)(2yddy-dy^2)-48uuydudy+5uy^2du^2=Cdu^2,$$

welche durch Setzen von

$$y = zz$$

wegen $yy = z^4$, $\quad ydy = 2z^3dz \quad$ und $\quad yddy + dy^2 = yddy + 4zzdz^2 = 2z^3ddz + 6zzdz$ und daher

$$2yddy = 4z^3ddz + 4zzdz^2 \quad \text{oder} \quad 2yddy - dy^2 = 4z^3ddz$$

diese Form

$$64(1-u^3)z^3ddz - 96uuz^3dudz + 5uz^4du^2 = Cdu^2$$

oder

$$64(1-u^3)ddz - 96uududz + 5uzdu^2 = \frac{Cdu^2}{z^3}$$

annimmt, welche also diese Integralgleichung $z^8 = 4zz - 3u$ in sich umfasst; und das in dem Fall, in dem die Konstante $C = -9$ ist, weil

$$y = \frac{3}{4}u + \frac{3^4}{4^5}u^4 + \frac{3^7}{4^8}u^7 + \text{etc.}$$

und daher für unendlich kleines u auch $z = \frac{1}{2}\sqrt{3u}$ ist.

§22 Weil kein Weg bekannt ist, diese Differentialgleichung zweiten Grades weiter zu reduzieren, wird es der Mühe Wert sein ausfindig zu machen, wie und wie sehr sie mit der endlichen Gleichung $z^8 = 4zz - 3u$ zusammenkommt. Für dieses Ziel wollen wir die Differentialgleichung in dieser Form darstellen

$$Lz^3ddz + Mz^3dudz + Nz^4du^2 = Cdu^2,$$

dass

$$64(1-u^3), \quad M = -96uu \quad \text{und} \quad N = 5u$$

ist; aber die endliche Gleichung gibt differenziert

$$8z^7dz = 8zdz - 3du \quad \text{oder} \quad 8dz(u - zz) = zdu,$$

woher weiter durch Differenzieren

$$8ddz(u - zz) = 16zdz^2 - 7dudz = \frac{9z^3 - 7uz}{8(u - zz)^2}du^2$$

wird. Weil also

$$\frac{dz}{du} = \frac{z}{8(u - zz)} \quad \text{und} \quad \frac{ddz}{du^2} = \frac{9z^3 - 7uz}{64(u - zz)^3}$$

ist, wird nach der Einsetzung diese Gleichung

$$\frac{(1 - z^3)z^4(9zz - 7u)}{(u - zz)^3} - \frac{12uuz^4}{u - zz} + 5uz^4 = C$$

oder

$$(1 - u^3)z^4(9zz - 7u) - (7uu + 5uzz)z^4(u - zz)^2 - C(u - zz)^3 = 0$$

hervorgehen, welche entwickelt und mithilfe der Gleichung $z^8 = 4zz - 3u$ reduziert auf die Potenzen von z kleiner als acht auf diese Gleichung führt

$$(9 + C)z^6 - 3(9 + C)uz^4 + 3(9 + C)uuzz - (9 + C)u^3 = 0,$$

welcher natürlich der Wert $C = -9$ Genüge leistet.

§23 Es lässt sich aber daher nicht mehr folgern, als dass diese Gleichung

$$z^8 = 4zz - 3u$$

in dieser Differenzen-Differentialgleichung

$$64(1 - u^3)z^3ddz - 96uuz^3dudz + 5uz^4du^2 = Cdu^2$$

in dem Fall, in dem $C = -9$ ist, enthalten ist. Dennoch lässt sich indes nicht einmal in diesem Fall das vollständige Integral darbieten, in welchen außerdem zwei konstante Größen eingehen. Noch viel weniger werden wir aber im Allgemeinen, welcher Wert auch immer C zugeteilt wird, eine Integration erhoffen können, weil nicht einmal im Fall $C = 0$ die Gleichung eine Integration mit bekannten Methoden zulässt. Daher sehen wir ein, wenn die algebraischen Gleichungen, deren Wurzeln wir hier auf unendliche Reihen geführt haben, den dritten Grad übersteigen, dass die Summen der daraus entstehenden Reihen mithilfe keiner bisher bekannten Methode ausfindig gemacht werden können.

§24 Anstelle des Schlussschnörkels möchte ich das umgekehrte Problem hinzufügen, in welchem nach Vorlage dieser kubischen Gleichung

$$y^3 + py + q = 0$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von dieser Form

$$ddy + Qdy + Ry = 0$$

gefunden werden muss, in welcher jene enthalten ist. Diese Untersuchung gelingt aber immer, nachdem natürlich zweimal differenziert und daher die Werte ddy und dy an entsprechender Stelle eingesetzt worden sind, sodass dass allein die Größe y und ihre Potenzen enthaltende Größen hervorgehen, welche sich mithilfe der Gleichung $y^3 + py + q = 0$ unter den dritten Term senken lassen werden. Danach setze man jeweils die von y freien und y sowie sein Quadrat yy enthaltenden Größen Null, wo es in angenehmer Weise passieren wird, dass, sobald zwei Bedingungen Genüge geleistet worden ist, die dritte von selbst erfüllt ist. Nach auf diese Weise durchgeführter Rechnung wird man aber

$$Q = \frac{18ppqdp^2 - 2(8p^3 - 27qq)dpdq - 54pqq^2}{(3qdp - 2pdq)(4p^3 + 27qq)} + \frac{2pdqq - 3qddp}{3qdp - 2pdq},$$

$$R = \frac{6p(dq^3 + pdp^2dq - qdp^3)}{(3qdp - 2pdq)(4p^3 + 27qq)} + \frac{dqddp - dpddq}{3qdp - 2pdq}$$

finden.

Aber diese Gleichung wird mit

$$\frac{4p^3 + 27qq}{(3qdp - 2pdq)^2}(2pdy - ydp)$$

multipliziert integrierbar gemacht und daher weiter für y eine kubische Gleichung, welche sich weiter erstreckt als die vorgelegte, gefunden werden.

§25 Aber die Differentialgleichung zweiten Grades wird gefälliger, wenn $qq = \frac{4p^3x}{27}$ gesetzt wird; es wird nämlich

$$ddy - dy\left(\frac{ddx}{dx} + \frac{dp}{p} - \frac{dx}{2x} - \frac{dx}{2(1+x)}\right)$$

$$+y\left(\frac{dpddx}{2pdx}-\frac{ddp}{2p}+\frac{3dp^2}{4pp}-\frac{dpdx}{4px}-\frac{dpdx}{4p(1+x)}-\frac{dx^2}{36x(1+x)}\right)=0$$

werden, welche mit

$$\frac{x(1+x)}{ppdx^2}(2pdy-ydp)$$

multipliziert und integriert

$$\frac{x(1+x)}{ppdx^2}\left(dy-\frac{ydp}{2p}\right)^2=\frac{C}{36}+\frac{yy}{36p}$$

liefert; und durch Setzen von $y=z\sqrt{p}$ findet man daher

$$\frac{6dz}{\sqrt{C+zz}}=\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}},$$

welche erneut integriert

$$(z+\sqrt{C+zz})^6=D\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{x(1+x)}\right)=\frac{1}{2}D\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)^2$$

gibt, woher man schließlich

$$z=\frac{y}{\sqrt{p}}=A(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})^{\frac{1}{3}}+B(\sqrt{x}-\sqrt{1+x})^{\frac{1}{3}}$$

und durch Nehmen von Kuben

$$z^3=-3ABz+(A^3+B^3)\sqrt{x}+(A^3-B^3)\sqrt{1+x}$$

findet.